



TITLE:

# アーベリアン・ヒッグス場方程式 のボルテックス解が示すカオス現 象 (大自由度・強非線形の波動現象 の数理)

AUTHOR(S):

河辺, 哲次; 太田, 正之輔

---

CITATION:

河辺, 哲次 ...[et al]. アーベリアン・ヒッグス場方程式のボルテックス解が示すカオス現象 (大自由度・強非線形の波動現象の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1092: 125-132

ISSUE DATE:

1999-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62925>

RIGHT:

## アーベリアン・ヒッグス場方程式のボルテックス解が示すカオス現象

九州芸術工科大学 河辺 哲次 (Tetsuji Kawabe)  
九州大学 工学部 太田 正之輔 (Shonosuke Ohta)

### [1] はじめに

ゲージ場の性質を解析的、摂動論的に研究する事は、ゲージ場の極めて高い非線形性の為に難しい問題である。

一方、カオスは、非線形システムに普遍的に存在する現象である。私たちは、カオスの普遍的概念がゲージ場のダイナミカルな性質を探るのに、役立つと考え、研究を続けてきた。そして、これまでに、次の様な現象を見つけた。

- (1) 純粋なヤンミルズ場方程式のモノポール解が、常にカオティックな振舞を示す事[1]。
- (2) ヤンミルズ・ヒッグス場方程式のモノポール解とスファレロン解が、摂動の強さに依存してカオス相からオーダー相に転移（オーダー・カオス相転移）する事[2-5]。
- (3) アーベリアン・ヒッグス場方程式のニールセン・オールセン(Nielsen-Olesen)ボルテックス解にも、この相転移に似た現象が存在する事[6,7]。
- (4) さらに、このボルテックス解には、ヤンミルズ・ヒッグス場理論でのカオスとは質的に異なる、多重オーダー・カオス相転移が観察された[8]。

本研究会では、先ず、アーベリアン・ヒッグス場方程式のボルテックス解が示す多重オーダー・カオス相転移を説明した。次に、場のリアプノフ指数の結合定数依存性、また、リアプノフ指数のボルテックス巻数依存性を解析して、この系が示す興味ある現象を指摘した。

### [2] ゲージ場 $A$ とヒッグス場 $\phi$ の方程式

アーベリアン・ヒッグス場理論のラグランジアン密度は、次式で与えられる。

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i A_\mu \phi$$

$$V(\phi) = \frac{\kappa}{4} (|\phi|^2 - 1)^2 \quad (\text{Higgs potential})$$

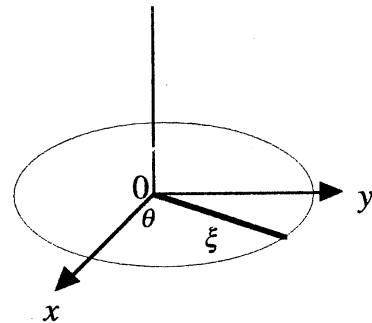
$\kappa$ : 結合定数

ゲージ場  $A$ 、ヒッグス場  $\phi$  の空間自由度に対して次のような軸対称性を仮定し、新たに場  $a, b$  を導入する。

$$A_\theta(\xi, \tau) = \frac{na(\xi, \tau)}{\xi}$$

$$\phi(\xi, \tau) = b(\xi, \tau) \exp(in\theta)$$

$$A_0 = 0 \quad (\text{ゲージ条件})$$



$$\xi = evr \quad (\text{空間変数})$$

$$\tau = evt \quad (\text{時間変数})$$

上式で  $n$  はボルテックスの巻数 (winding number) である。この様な仮定の下で、(1) から場の方程式が得られる。この時、式の中に1次の微分項が現れ、系の長時間発展の計算精度を悪くする。計算精度を上げるためにこの1次の微分項を消去する必要がある。適当な変数変換の後、場の方程式は次式のように書ける。

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2)a = -\frac{3a}{4\xi^2} + (1 - \sqrt{\xi}a) \frac{b^2}{\xi\sqrt{\xi}} \quad (2)$$

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2)b = \frac{b}{4\xi^2} - \frac{n^2}{\xi^2} (1 - \sqrt{\xi}a)^2 b + \kappa(1 - \frac{b^2}{\xi})b \quad (3)$$

ボルテックスの単位長さ当たりのエネルギーは次式で与えられる。

$$E(n, \kappa) = 2\pi \int_0^\infty d\xi \xi \left[ \frac{n^2}{2\xi^2} (\partial_\tau a)^2 + \frac{n^2}{2\xi^2} (\partial_\xi a)^2 + \frac{n^2}{4\xi^2} (1-a)^2 b^2 + \frac{1}{2} (\partial_\tau b)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\xi b)^2 + \frac{\kappa}{4} (1-b^2)^2 \right] \quad (4)$$

図1は $a, b$ の定常解 $a_s, b_s$ を示す。境界条件は $a(0)=b(0)=0$ 、 $a(\infty)=b(\infty)=1$ である。また、図2はベクトル場 $A$ を示したものであり、ボルテックス状態であることが分かる。図3はヒッグス場を示す。

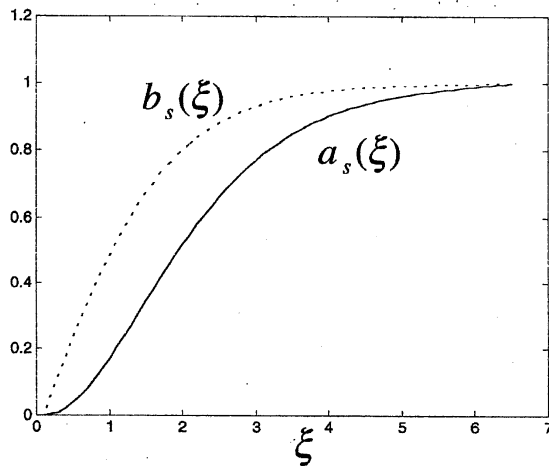


図1 定常解

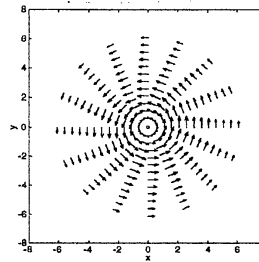


図2 ベクトル場

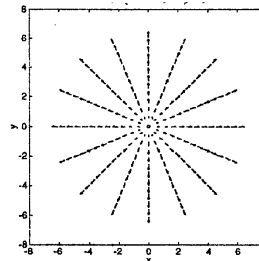


図3 ヒッグス場

### [3] 数値計算の方法

場の方程式(2)と(3)をFermi-Pasta-Ulam法で空間を離散化し、系を $N$ 個の非線形振動子系に変える。系のカオスを調べるために2通りの初期状態の取り方(A)と(B)を考える。

(A) 系に初期エネルギー $E_0$ を与えてゲージ場の特定モード( $j=\frac{N}{2}$ )のみを励起した状態を初期状態とする方法。この時、 $E_0$ は小さな値から徐々に増大させて行くが、各 $E_0$ 毎に初期状態を用意する。

(B) カオス状態を初期状態とする方法。このためには、(A)の方法で、 $j=\frac{N}{2}$ モードに十分大きなエネルギーを与えて、系を一気にカオス状態にする。この状態を初期状態として、系の時間発展を調べる。徐々に系のエネルギー $E$ を下げながら、同様な計算を繰り返す。

このような初期状態を得るために、先ず、ゲージ場の定常解の周りで場をモード展開する。

$$a(i, \tau) = a_s(i) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=1}^{N-1} \psi_a(j, \tau) \sin\left(\frac{\pi i j}{N}\right)$$

この式で  $j = \frac{N}{2}$  モードのみの励起を考えて  $\psi_a(\frac{N}{2}, 0)$  を初期揺らぎの大きさとして与え

る。この  $\psi_a(\frac{N}{2}, 0)$  の大きさで、初期エネルギー  $E_0$  が決まる。数値計算は 8 次の Runge-Kutta 法を使い、時間刻みは 0.03 とした。

系のカオス状態を調べるために、次式で定義される最大リアプノフ指数を調べる。

$$\sigma_L = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{d(\tau)}{d(0)}$$

この指数の値が 0 ならば、系はオーダー相である。正の値をとれば系はカオス状態である。全系のエネルギー  $E$  に対するこの指数の振舞を、結合定数の大きさが  $\kappa = 0.5$  の臨界結合定数  $\kappa_c$  の場合に計算する。

#### [4] リアプノフ指数 $\sigma_L$ の振舞

図 4 は、巻数  $n=1$  の場合のボルテックスに対するリアプノフ指数の結果である。ここで、格子数  $N=64$ , 空間刻み  $=0.1$  ととった。

初期状態(B)から得られたリアプノフ指数は、エネルギーに対してスムーズに単調増加している。これは、カオス相におけるこの指数がエネルギー変化に対して異常のない滑らかな関数である事を示している。

他方、初期状態(A)から得られたリアプノフ指数の振舞は(B)に比べて複雑である。大まかな構造としてオーダー・カオス相転移的な振舞が読みとれるが、エネルギー  $E$  が 212、995、1990 辺りで複雑な構造を持っている。これは、初期揺らぎを与えてから、カオス相に転移するまでの時間、即ち、誘導時間に、異常な振舞があったことを示唆している。

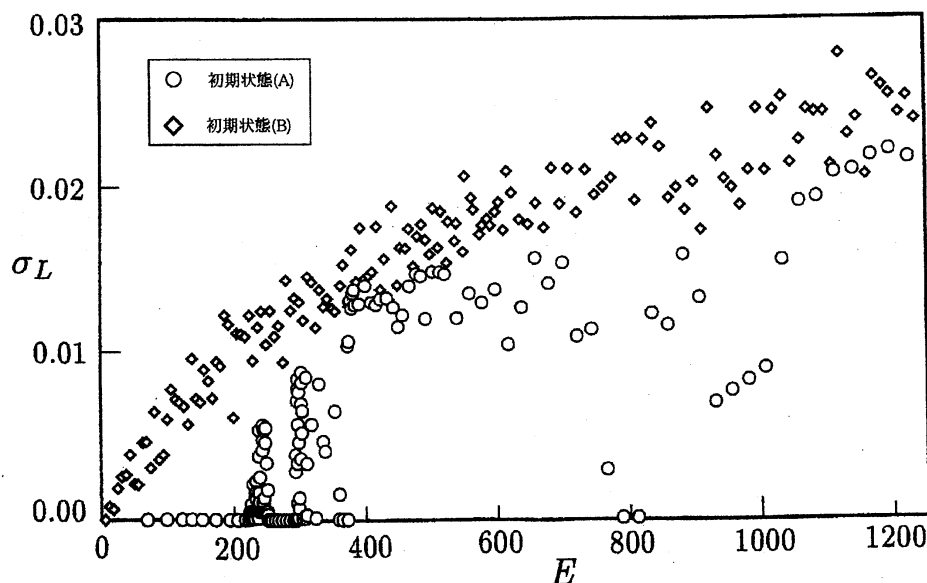


図 4 リアプノフ指数と系のエネルギー  $E$  との関係

### [5] 誘導時間 $\tau_I$ の振舞

誘導時間は、特定のモードを励起して系を時間発展させる場合、しばらくして全てのモードが励起し、系が熱平衡状態に至る時のその間の時間で定義される。カオスは熱平衡状態を経て実現される。

図5は誘導時間の計算結果である。 $E \geq 200$ の初期値  $E$  に対して  $\tau = 1 \times 10^7$  まで計算を実行した結果である。全体として、揺らぎのエネルギーの増加とともに誘導時間が急激に減少する。

ほとんど全ての初期値  $E$  に対して有限な値の  $\tau_I$  が得られた。図5から  $\tau_I$  には小さな山や谷が沢山存在して複雑な構造をしていることがわかるが、特に注目すべき点は、3ヶ所の  $E$  でピークが観測されたことである。

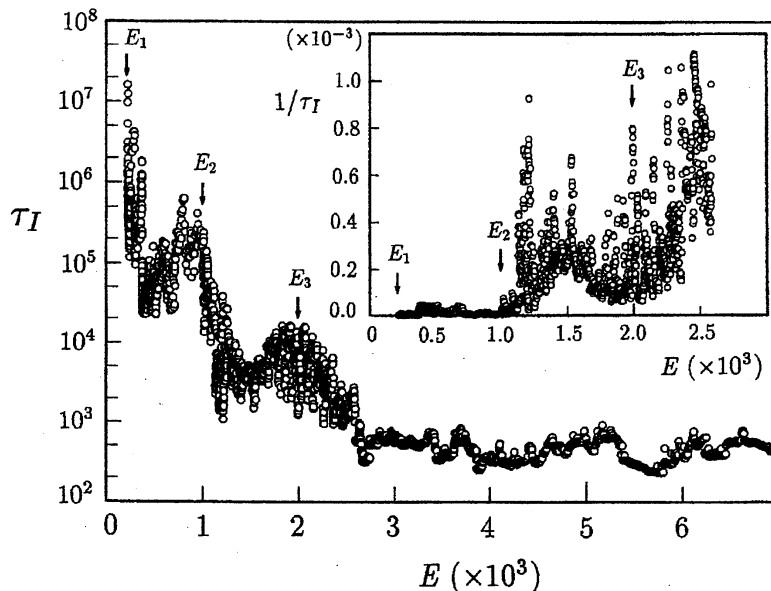


図5 誘導時間と系のエネルギー  $E$  との関係

そこで、このピークの構造を調べるために臨界現象の観点から解析した。図6はその結果である。特に興味ある点は、3つの  $E$  のピークで次式が成立することである。

$$\tau_I \approx |E - E_i|^{-\eta} \quad \eta = 1$$

これは、この系でのオーダー・カオス相転移が臨界現象と本質的な関わりを持っていることを示唆している。

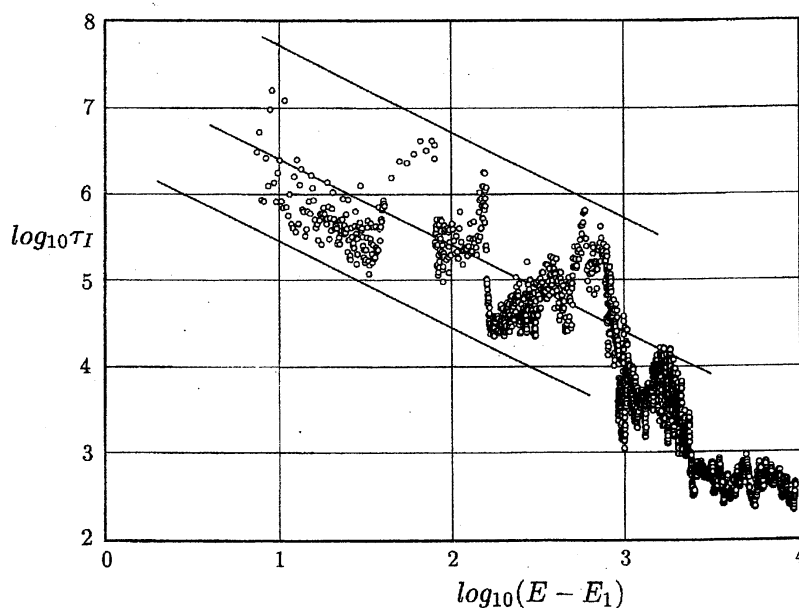


図6 誘導時間と系のエネルギー  $E$  の対数プロット

#### [6] リアプノフ指数 $\sigma_L$ の結合定数 $\kappa$ 依存性

これまでは、系が臨界結合定数  $\kappa_c$  という特別な値を持つ場合でのリアプノフ指数の解析であった。次に、リアプノフ指数の  $\kappa$  依存性を調べる。

図7 a-c は、巻数  $n=1$  の場合、結合定数の大きさ  $\kappa$  が  $\kappa=0.1$ 、 $\kappa=0.5$ 、 $\kappa=0.9$  のボルテックスに対する結果である。

図7からは、リアプノフ指数が  $E$  と共に増加していることがわかる。

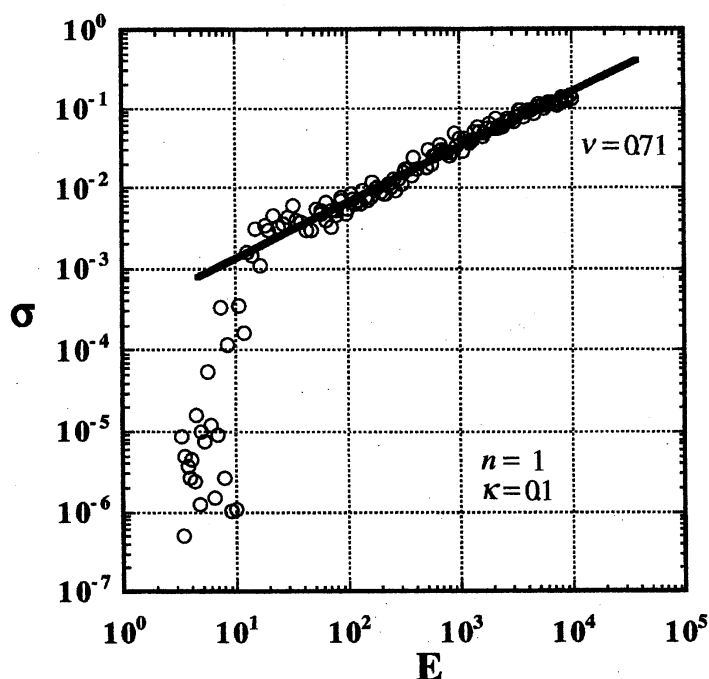


図7 a リアプノフ指数  
のエネルギー依存性  
 $\kappa=0.1$  の場合

また、 $E > 100$  辺りから増加の傾きが変わることが読みとれる。

いま、 $E > 100$  のデータに対してリアプノフ指数と系のエネルギーの間に次の様な関係を仮定する。

$$\sigma_L \propto E^\nu$$

データから指数  $\nu$  は、 $\kappa = 0.1$  の時  $\nu = 0.70536$ 、 $\kappa = 0.5$  の時  $\nu = 0.63968$ 、 $\kappa = 0.9$  の時  $\nu = 0.51343$  と求まる。

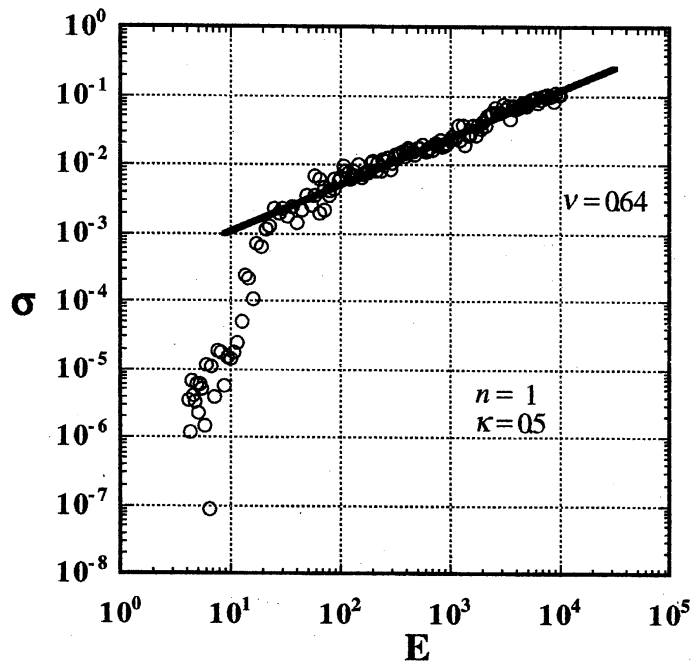


図 7 b リアプノフ指数  
のエネルギー依存性  
 $\kappa = 0.5$  の場合

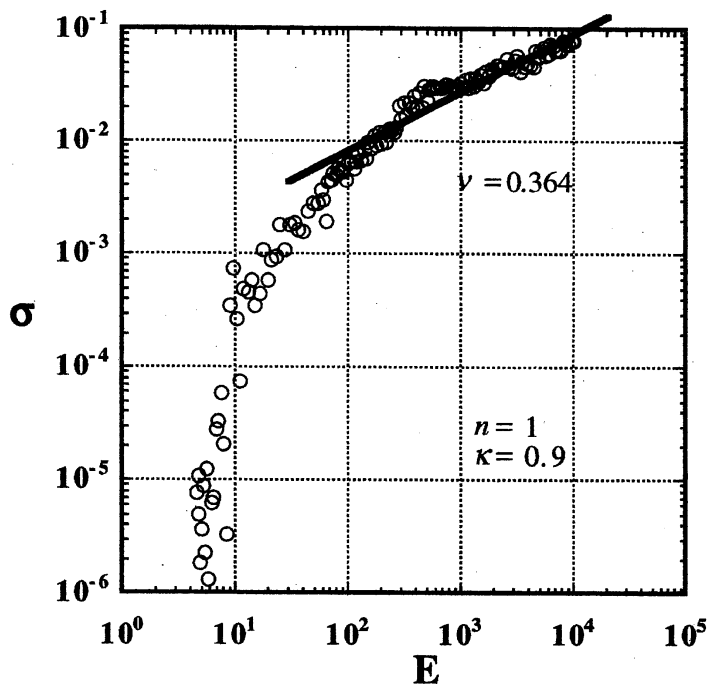


図 7 c リアプノフ指数  
のエネルギー依存性  
 $\kappa = 0.9$  の場合



### [7] 指数 $\nu$ の結合定数 $\kappa$ 依存性

図8は、この指数  $\nu$  の  $\kappa$  依存性を示したものである。

興味ある結果は、 $\kappa_c = 0.5$  を境にして  $\nu$  の  $\kappa$  依存性に顕著な違いが出ることである。

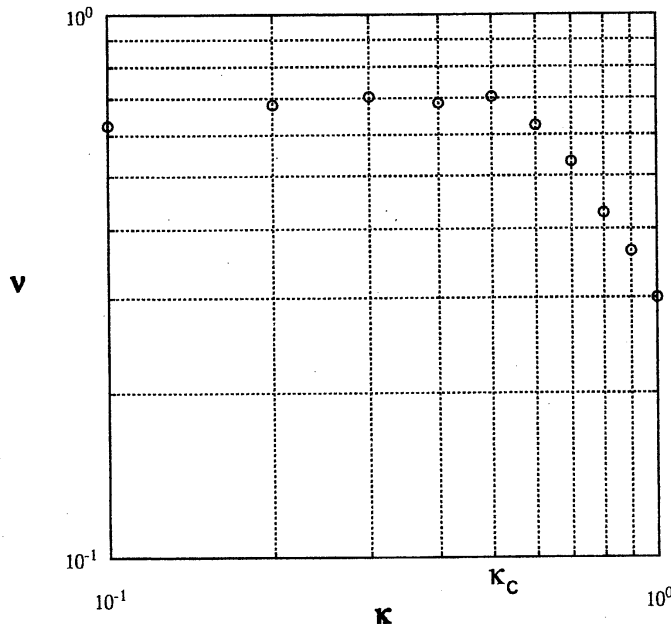


図8 指数  $\nu$  の  $\kappa$  依存性  
 $n = 1$  の場合

このボルテックス解の static な性質として、 $\kappa$  が  $\kappa_c$  より小さな領域は、第一種超伝導状態に、また、 $\kappa$  が  $\kappa_c$  より大きな領域は、第二種超伝導状態に対応する事が知られている。図8の構造は、本質的にボルテックス解の dynamical な性質を反映している筈だが、この図は、static な性質も同時に影響していることを示唆している。これは、非常に興味ある結果であり、今後解明すべき課題の1つである。また、これらの結果が巻数  $n$  の依存性まで考慮した場合、どの様に影響を受けるかを調べることも大切な課題である。

### 参考文献

- [1] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Rev. **D41** (1990)†1983
- [2] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Rev. **D44** (1991) 1274
- [3] T. Kawabe, Phys. Lett. **B274** (1992) 399
- [4] T. Kawabe, J. Phys. A:Math. Gen. **26** (1993) L1131
- [5] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Lett. **B334** (1994) 127
- [6] T. Kawabe, Phys. Lett. **B343** (1995) 254
- [7] T. Kawabe, S. Ohta, Phys. Lett. **B392** (1997) 433
- [8] S. Ohta, T. Kawabe, Phys. Rev. **D56** (1997) 3660